Déterminer la loi de probabilité de X et calculer E(X).

PROBLEME

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.
(pour la figure on prendra AB = BC = 6 (en cm)).
On désigne par I, J et O les milieux respectifs de [AB], [BC] et [AC].
Soient I′ le symétrique de O par rapport (AB) et J′ le symétrique de O par rapport à (BC). Les demi-droites [OI) et [OJ) coupent le cercle de diamètre [AC] respectivement en A′ et B′.

I-1) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\left(\frac{-\pi}{4}\right)$. Déterminer r(A) et r(B).

2) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a- Montrer que : $\frac{OI}{OA'} = \frac{OJ}{OB'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b- En déduire h(A′) et h(B′).

3) On désigne par S la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

a- Montrer que S = h ∘ r.

b- En déduire les éléments caractéristiques de S.

4) Soit P un point du plan distinct de O et soit P′ = r(P). On désigne par Q le projeté orthogonal de P sur [OP′].

a- Montrer que le triangle OPQ est rectangle et isocèle.

b- Montrer alors que S(P) = Q.

c- Montrer que OBI′A est un carré. En déduire S(I′).

d- Déterminer S(J′).

II- Soit M un point de la droite (AB) tel que M ≠ B. (Pour la figure on prendra : M ∈ [BA) et BM = 8 (en cm) . Soit Δ la médiatrice de [OM].

1) On pose S(M) = N. Montrer que {N} = Δ ∩ (IJ).

2) Soit $\mathscr{P}$ la parabole de foyer O et de directrice la droite (I′J′).

a- Vérifier que A et C sont deux points de $\mathscr{P}$ et préciser les tangentes à $\mathscr{P}$ en ces deux points.

b- Montrer que lorsque le point M varie sur (AB)\{B}, la droite (MN) reste tangente à la parabole $\mathscr{P}$.

c- Construire le point de contact de (MN) et de $\mathscr{P}$.